

針對學習難點的教學設計——四邊形的特性

程翠娟、柯志明
教育局教育基建分部

引言

香港的小學數學課程中，四邊形這個課題出現於二年級至四年級，橫跨兩個學習階段。由二年級以直觀認識長方形、正方形、梯形及菱形及它們的不同構作方法，接著於三年級認識平行四邊形的簡單特性，到四年級的認識及比較各種四邊形的特性及用不同的方法製作四邊形等，當中涉及視覺（visual）、描述（descriptive）以致理論（theoretical）等幾何思維的不同層次（van Hiele, 1986），是小學課程的一個重要課題。

當我們查閱全港性系統評估（Territory-wide System Assessment, TSA）的一些相關題目的學生表現時，發現部份題目的全港答對率偏低。例如2008年的6MC2第42題及6MC4第36題（圖一）：

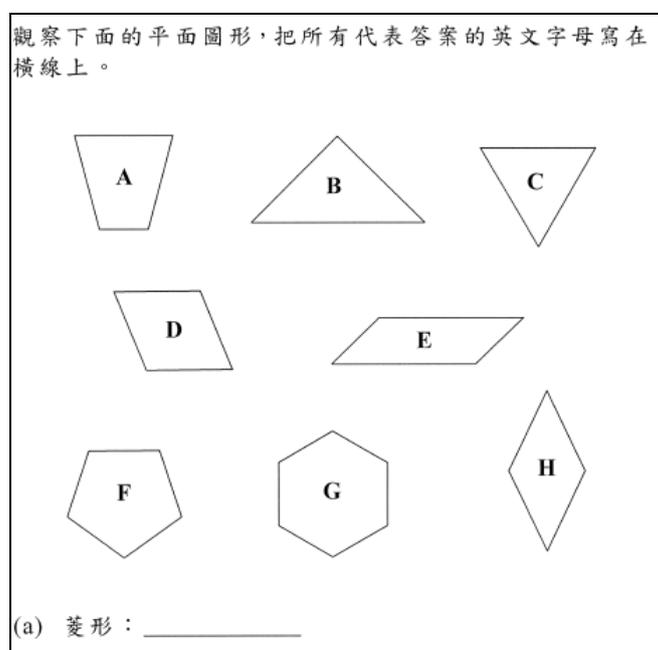


圖 一

這一題（a）部的全港答對率僅為 19.7%，即全港少於五分之一的學生

能答對，這絕不是一個理想的答對率。答對率如此低的原因是大部分學生只能判斷 H 為菱形，而漏填 D，相信他們都以為 D 是平行四邊形，因為 D 為常見的平行四邊形的姿態。換句話說，即學生只以圖形的姿態來判斷，缺乏一套實在的判斷方法。

學生在從四邊形的特性判斷其可能形狀方面的表現一般，例如在 2007 年 6MC2 第 34 題（圖二）：

有兩種四邊形具備以下特性：兩組對邊平行及四條邊長度相等。

(a) 寫出這兩種四邊形的名稱。

(i) _____ 形 (ii) _____ 形

圖 二

(a) (i) 的全港答對率有 77.1%，但 (a) (ii) 的答對率則跌至 57.7%，少了差不多 20%，而當中不少學生漏答。我們估計不少學生可能只想像得到一種能滿足所示的條件的四邊形。

在方格紙上構作四邊形的表現有時也不能令人滿意。例如 2008 年 3MC1 第 28 題及 3MC4 第 27 題（圖三）：

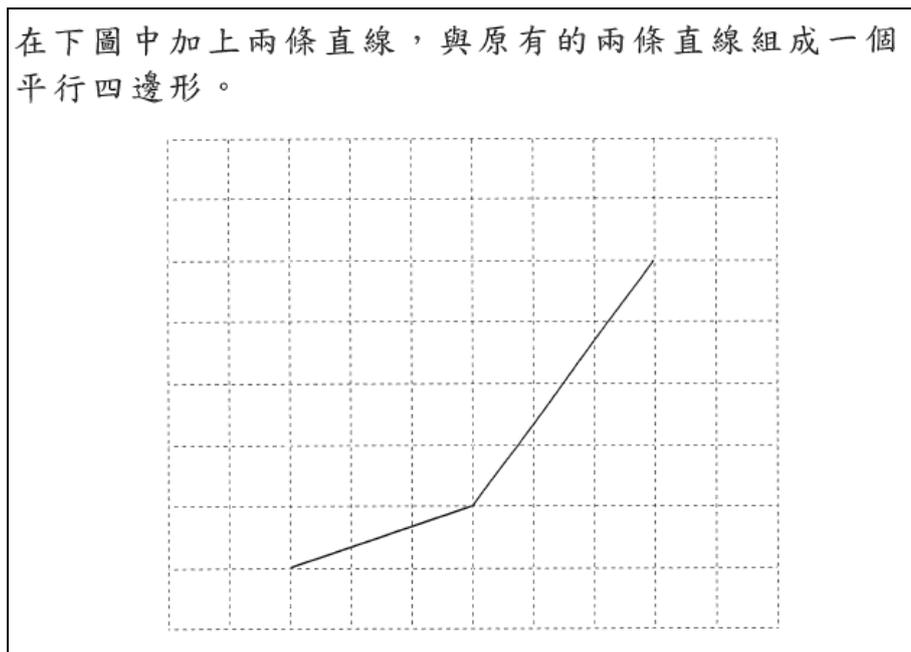


圖 三

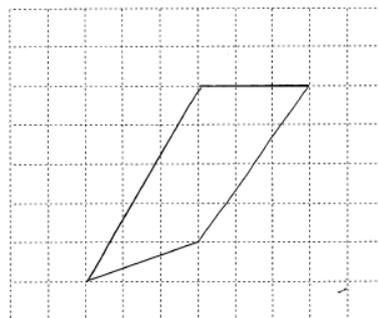
這一題的全港答對率只有 37.3%。從考評局隨機抽取的答卷中，我們發現很多學生並不能準確地畫出平行邊（圖四）：

在下圖中加上兩條直線，與原有的兩條直線組成一個平行四邊形。



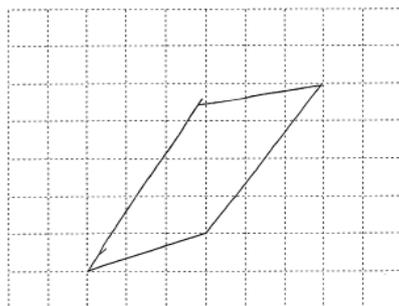
(a)

在下圖中加上兩條直線，與原有的兩條直線組成一個平行四邊形。



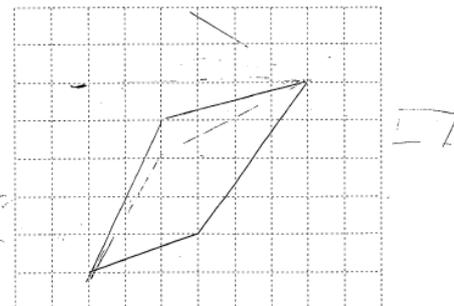
(b)

在下圖中加上兩條直線，與原有的兩條直線組成一個平行四邊形。



(c)

在下圖中加上兩條直線，與原有的兩條直線組成一個平行四邊形。



(d)

圖 四

有見及此，我們設計了一份診斷課業，透過學生訪談，了解學生在這課題的學習難點，然後針對這些學習難點設計了一套課業。為使課堂的討論更加互動，我們利用免費的動態幾何軟件 GeoGebra 製作動態課業供老師於課堂使用。這套的工作紙及動態圖形檔可在教育局的「網上學與教支援」網頁 <http://wlts.edb.hkcity.net> 裏的 KS2-S2-1 單元中找到。而本文旨在剖釋當中的設計理念如何能幫助學生學好此課題。

學習難點

學生訪談是了解他們學習難點的有效方法。我們設計了一份診斷課業，並挑選了九位學生進行訪談。綜合訪談的結果，我們發現學生有以下的學習難點：

- (一) 學生大致能夠辨認已知圖形的特性，卻未能以圖形的特性來辨認圖形。他們往往只「直觀地」以圖形的姿態（orientation）來判斷；
- (二) 學生能利用直尺判斷兩條邊是否相等，卻對判斷兩隻角是否相等感到困難；
- (三) 有學生將「平行」和「垂直」分別理解為「水平」和「鉛垂」，如以為平行線是(=)，垂直線是(\parallel)，或以為垂直線是單一直線(\perp)；
- (四) 絕大部份學生都缺乏在方格紙上繪畫平行線及垂直線的技巧及方法。

針對這些學習難點，我們設計了一套課業，讓學生先歸納四邊形的特性，再學習如何利用四邊形的特性把四邊形分類，並在方格紙或釘板上構作不同的四邊形。

教學設計一：由四邊形辨認其特性

二年級學生學習四邊形這個課題時，我們只要求他們能直觀辨認長方形、正方形、梯形及菱形。換句話說，即期望學生能夠一看該圖形就能說出其名稱。故此，學生所見的四邊形一般都是以常規的姿態出現，例如正方形和菱形必以圖五（a）和圖五（b）的姿態出現。所以當學生見到以非常規姿態出現的圖形如圖五（c）的正方形，學生便就會以它的姿態而判斷它為菱形。這情況也有在訪談的過程中出現。

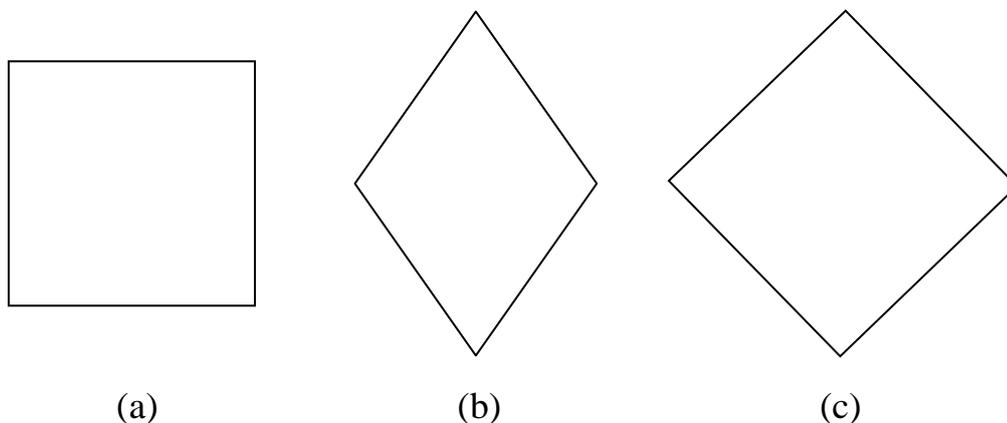


圖 五

故此在四年級開始學習這個課題時，我們把一大堆的四邊形讓學生以直觀的方式辨認出來（圖六）。對於一些常見的四邊形（如 R），大家都很容易得到它是正方形的共識。可是對於一些非慣常形態的四邊形如 M 和 N，有學生會以它們的姿態分別誤判為菱形及平行四邊形。教師可利用這些具爭議性的四邊形，引導學生認識「直觀辨認」的不足之處，並思考辨認四邊形及把它們分類的準則。

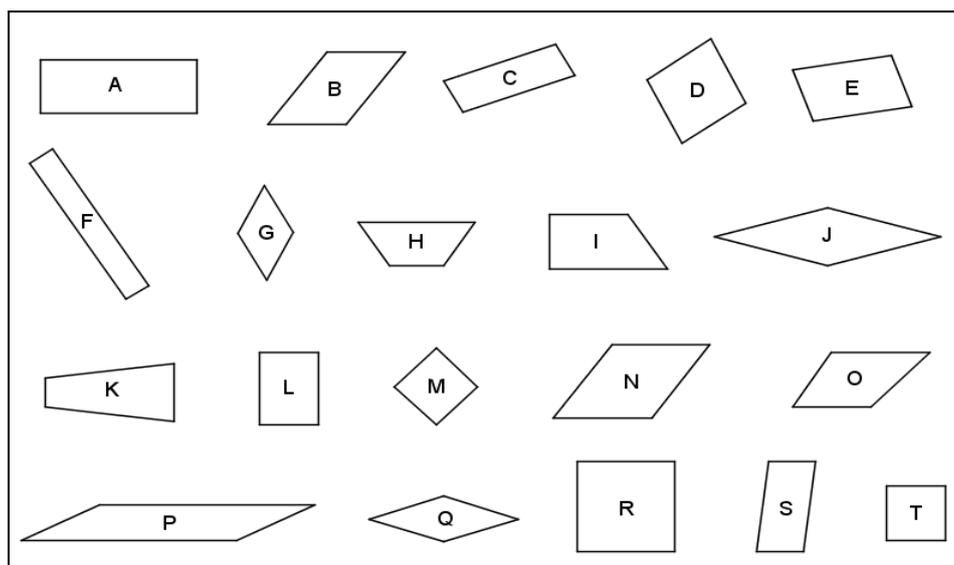


圖 六

要掌握判別四邊形的方法，先要認識各種四邊形的特性。教師可利用我們提供的簡報，先介紹或重溫如對邊、直角、對角和平行等詞彙，然後與學生一同探討工作紙的常規四邊形（圖七）的幾何的特性。教師應先和學生討論如何利用直尺探討對邊是否相等、是否有直角（以直尺的直角位來判斷）及平行邊（利用直尺量度兩線段的垂直距離）等特性，亦可運用提供的 GeoGebra 檔協助講解（圖八）。

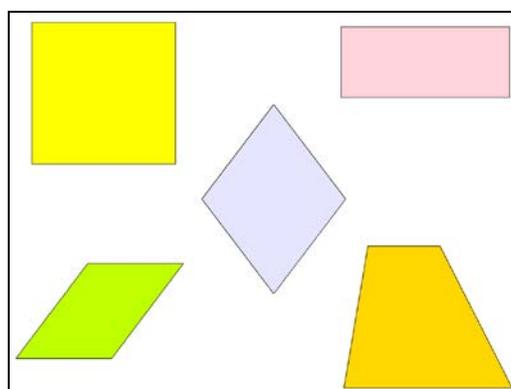


圖 七

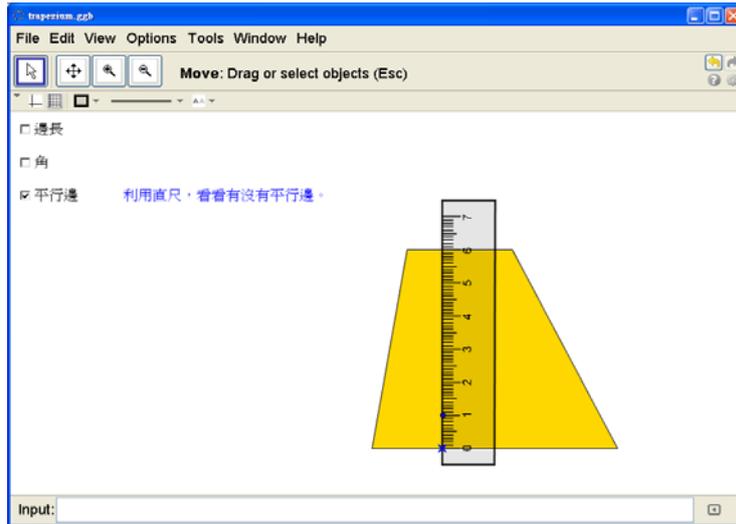


圖 八

要判斷四邊形的對角是否相等，由於沒有量角器，我們未能以量度的方法處理。我們建議把工作紙的常規四邊形剪出來，然後透過對摺（圖九）或旋轉後重合（圖十）等方法，得出菱形及平行四邊形對角相等的結果。這個做法的好處是利用了對稱性質（軸對稱及旋轉對稱）解釋了為何菱形及平行四邊形的對角必定相等，既不需要使用超出課程要求的量角器，更把學生們的認知由「驗證」提升到「非正式論證」（informal deduction）的層次。這方法亦解釋了之前以直尺量度得出的「對邊相等」及「四邊相等」等結果，更為學生將來學習軸對稱及旋轉對稱（增潤課程）鋪路。

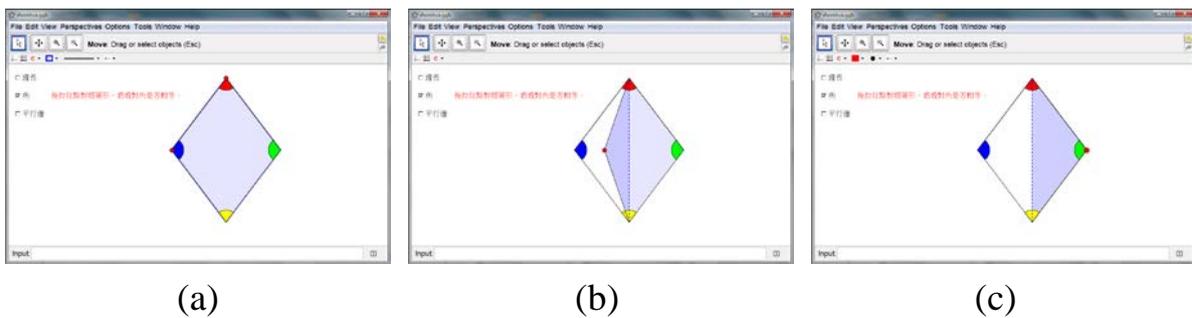


圖 九

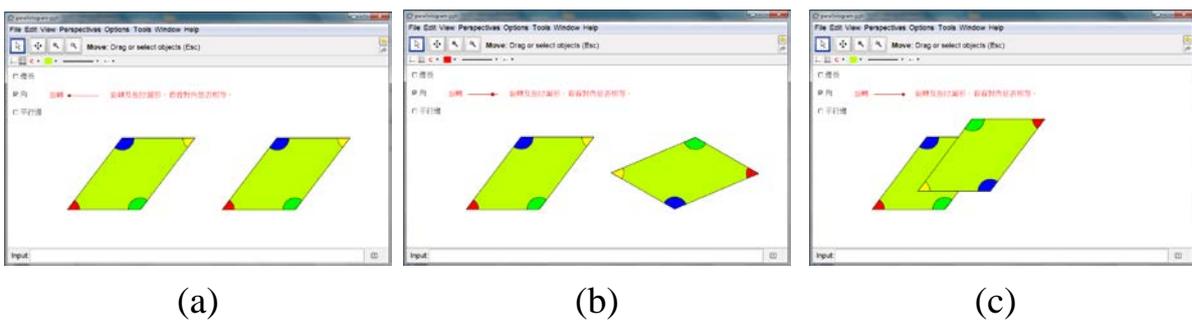


圖 十

教學設計二：以特性把四邊形分類

當學生認識了各種四邊形的特性後，接著的問題就是如何利用這些特性辨認四邊形及把它們分類。其實四邊形的邊長、角和平行等特性有着因果關係，只要我們知道一個四邊形的某些特性，就足夠我們判斷它是甚麼四邊形，從而知道它的所有特性。由於直尺是學生惟一可以使用的量度工具，而且經過前述的課業活動後，他們已十分熟悉如何利用直尺去判斷相等邊、直角和平行邊等特性，所以我們設計了一個利用邊長和直角等特性去辨認四邊形的課業「邊長與四邊形」(又稱為「電子幾何條」)，透過軟件 GeoGebra 改變四邊形的邊長，讓教師動態地呈現在「四邊相等」、「兩組對邊相等」等條件下四邊形可能出現的形狀，幫助學生掌握利用邊長及直角等特性來分辨四邊形的方法。

舉例來說，教師可以先提問學生：「若一個四邊形有四條相等邊，這是一個什麼四邊形？」部份學生可能只會想像到正方形。教師接著可開啓 GeoGebra 檔 (圖十一(a))，把四條邊連接起來後 (圖十一(b))，再將四條邊改變成邊長相等 (圖十一(c))。然後老師再拖拉綠點，讓學生知道即使我們固定了四邊形的四條邊長，它的形狀仍可改變。

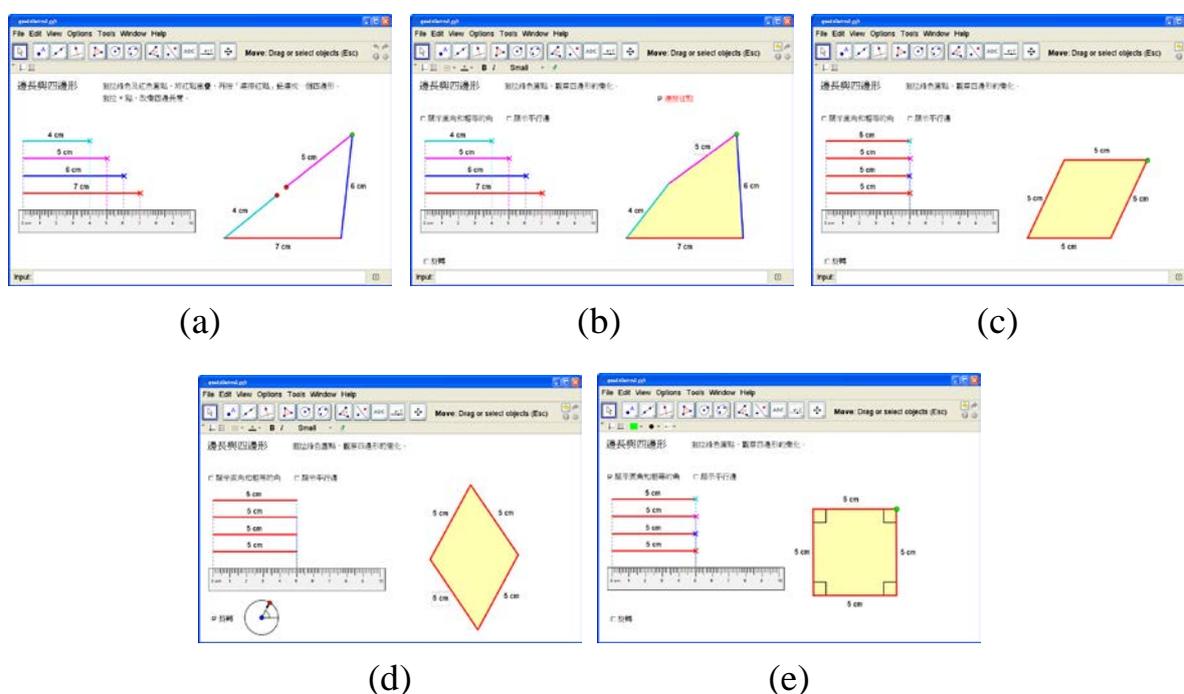


圖 十 一

部份學生可能會以為圖十一(c)是一平行四邊形，教師可把四邊形轉動成學生常見的姿態（圖十一(d)），讓他們知道這其實是一個菱形，從而教導學生應以四邊形的特性而非姿態來作判斷。接着老師提問學生：「四邊相等的四邊形除了菱形外，還可能是什麼圖形？」教師拉動綠點，使四隻角成為直角（圖十一(e)）。由此學生除了可以明白到有正方形和菱形兩種四邊形能滿足「四邊相等」這個條件外，更能夠透過觀察由菱形到正方形的連續變化，認識到正方形只是菱形的一個特別情況（有直角的菱形），令他們較為容易將四邊形的分類認知由割裂式分類（partition classification，圖十二(a)）過渡到層遞式分類（hierarchical classification，圖十二(b)）。見 de Villiers, 1994）。

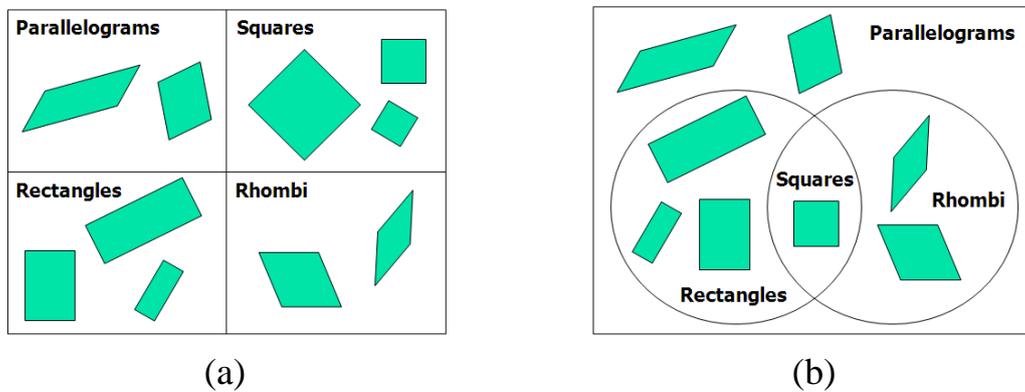


圖 十 二

使用動態幾何軟件的另一個優點，就是能夠透過動態地改變圖形的一些已知條件（hypothesis），讓學生看到某些結果（conclusion）隨之出現，從而將因果關係（causal effects）視像化（Laborde, 2005）。例如當學生將四邊形的邊長由只有一組對邊相等（圖十三(a)）改變為有兩組對邊相等時，他們就會發現圖形立即會出現兩組對角相等和兩組對邊平行的特性（圖十三(b)），從而認識到四邊形只要有兩組對邊相等，它就必然是平行四邊形了。

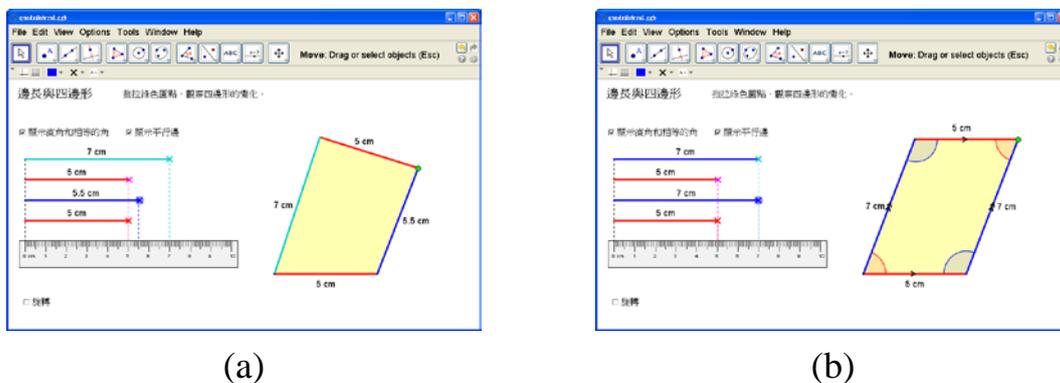


圖 十 三

完成「邊長與四邊形」的活動後，我們把討論結果整合成一樹形圖（圖十四）。有別於常見的由一般到特殊的樹形圖，我們的樹形圖採用了由特殊到一般（generalization）的方法（de Villiers, 1994），讓學生由最特殊的「四邊相等」開始，逐步放寬到「兩組對邊相等」、「只得一組對邊平行」等較一般的條件，讓學生掌握以是否有相等邊和直角等特性去辨認四邊形，並把它們分類。

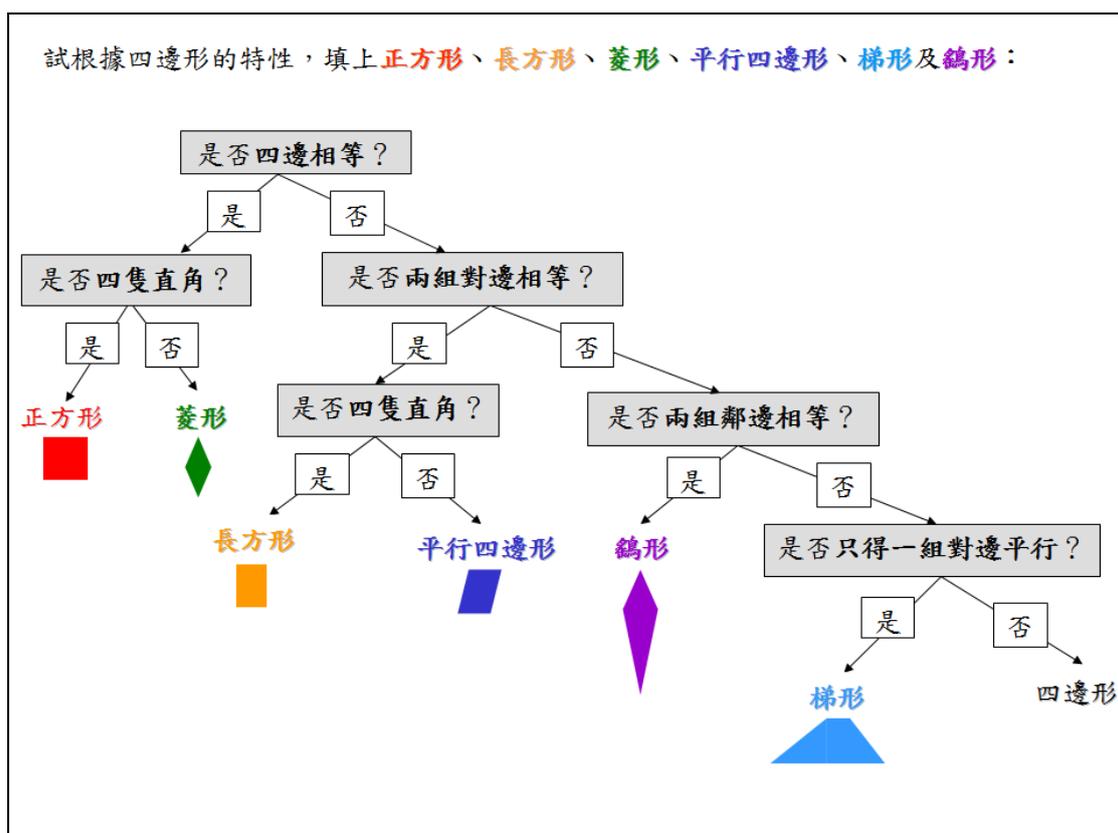


圖 十 四

學生掌握了利用邊長和直角去辨認四邊形的方法後，教師就可以回到之前將一大堆四邊形分類的課業，讓他們以所學的方法判別之前具爭議性的四邊形（如 M 和 N）。教師亦可利用所提供的 GeoGebra 檔和他們討論如何利用直尺去協助辨認四邊形，並透過 GeoGebra 檔的著色功能將他們分類（圖十五）。例如圖形 N，我們透過直尺量度知道它四邊相等（邊長 25 mm）。由於它沒有直角，所以它是一個菱形。

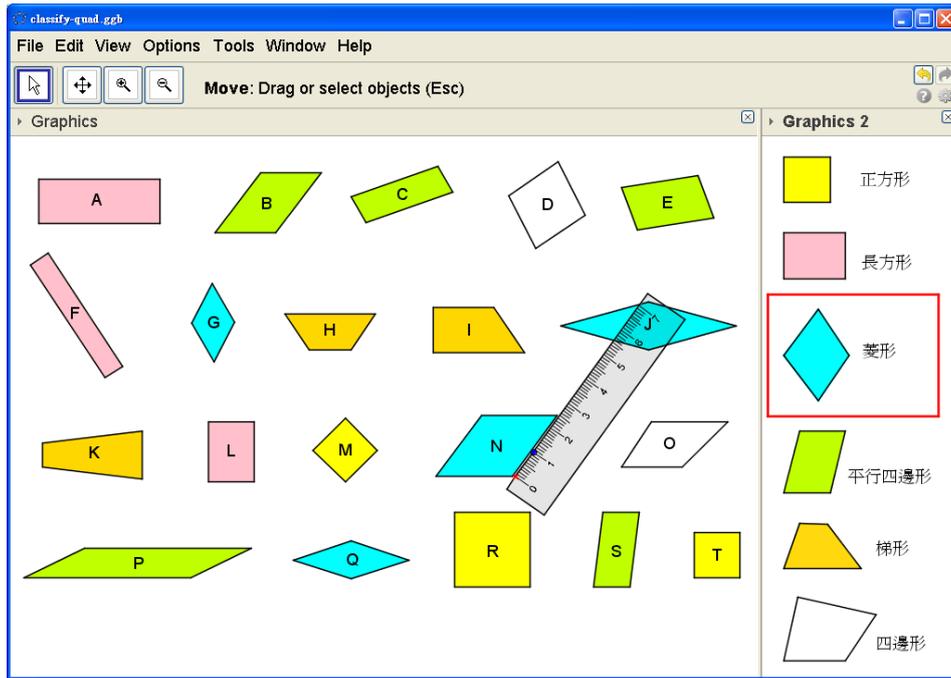


圖 十 五

教學設計三：在方格紙上構作四邊形

TSA 的數據反映學生在方格紙上畫平行四邊形的表現並不理想，最主要的原因是他們不懂得利用格線畫出與對邊平行的線。在訪談過程中，我們發現不少學生都有平行的概念，他們會憑感覺把直尺慢慢地向下移動到差不多的位置畫上平行邊，以致畫出來的平行線有欠準確。

為幫助學生掌握利用方格紙的格線（或釘板的釘點）繪畫四邊形的方法，我們設計了一套工作紙，配合動態幾何 GeoGebra 檔使用。以繪畫平行四邊形為例，我們著學生思考如何在一幅如圖十六般已有兩條直線的圖中加上兩條直線，組成一個平行四邊形。教師可利用 GeoGebra 檔，透過拖拉（圖十七(a)）及把直線所佔的方格著色（圖十七(b)），向學生展示如何透過數格準確地繪畫平行和相等邊。

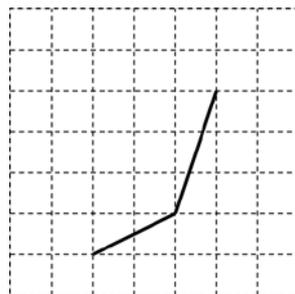
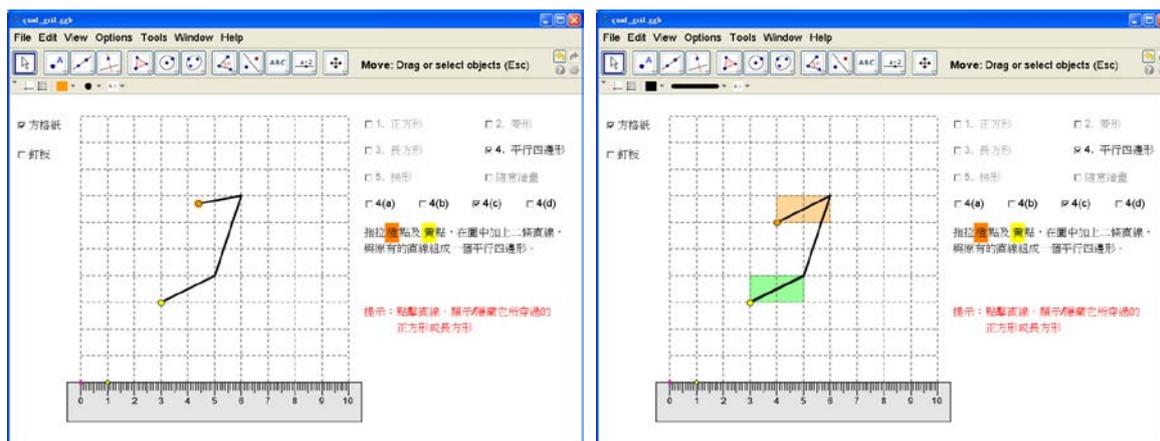


圖 十 六

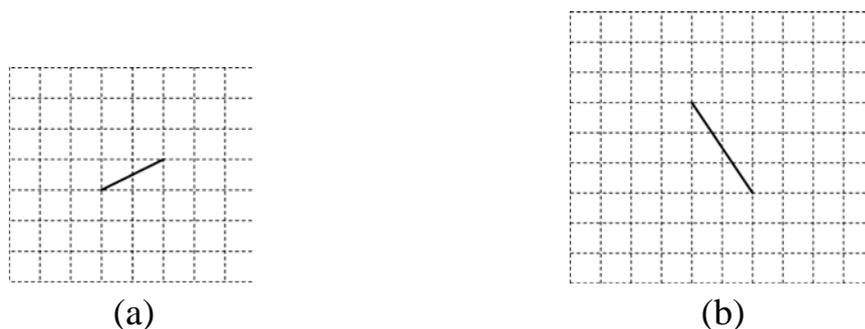


(a)

(b)

圖 十 七

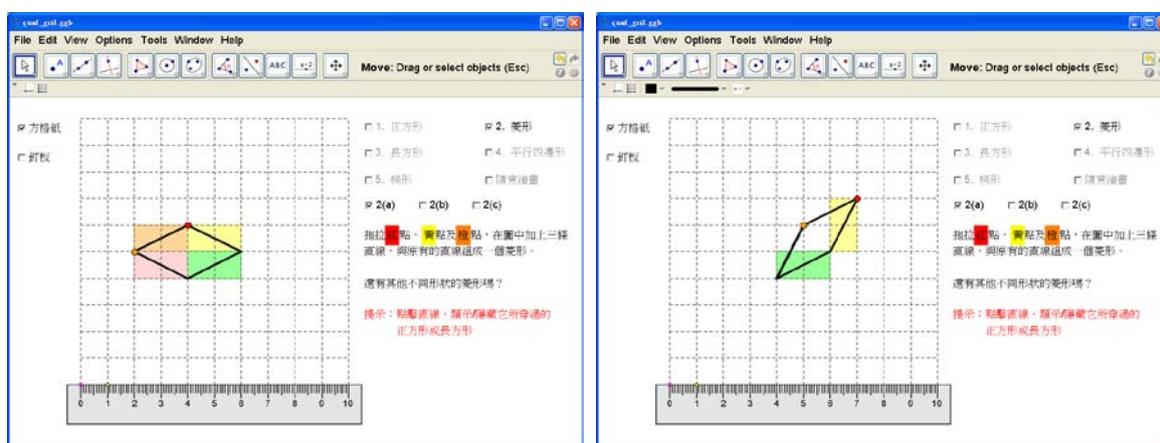
我們的繪畫菱形課業就更具挑戰性。在圖十八(a) 和 (b) 中，我們要求學生加上三條直線以組成一個菱形，並且著他們思考能組成多少個**不同形狀**的菱形。在講解圖十八(a)時，教師可以「馬行日」的象棋步法協助學生掌握繪畫三條邊的方法，如圖十九所示。



(a)

(b)

圖 十 八



(a)

(b)

圖 十 九

我們最初也擔心這個繪畫菱形的課業對學生來說太艱深。但在觀課中，我們發現大部份學生都能夠利用格線準確地繪畫菱形，並且十分投入學習活動，討論氣氛熱烈。在最困難的圖十八(b)中，更有學生能夠清楚地向同學解釋繪畫第二個不同形狀菱形的方法。由此可見，我們不應該低估學生的學習能力。只要有適當的指導，他們絕對可以學得更多和更好。

當學生熟習在方格紙繪畫各種四邊形的方法後，我們可以讓他們在方格紙上隨意繪畫四邊形，並向同學指出所畫四邊形的名稱及其原因。留意這個活動可能會有出人意表的結果。例如我們觀課時見到一個學生畫出如圖二十(a)的四邊形。大家最初都以為這是一個平行四邊形，但當用直尺一量，發現原來四條邊的長度都是 5 cm (圖二十(b) (c))，所以它是一個菱形！雖然老師未能以勾股定理向學生解釋為何如此「巧合」，但這也是一個很好的機會讓他們運用所學的判斷方法，並體會這方法的重要性。

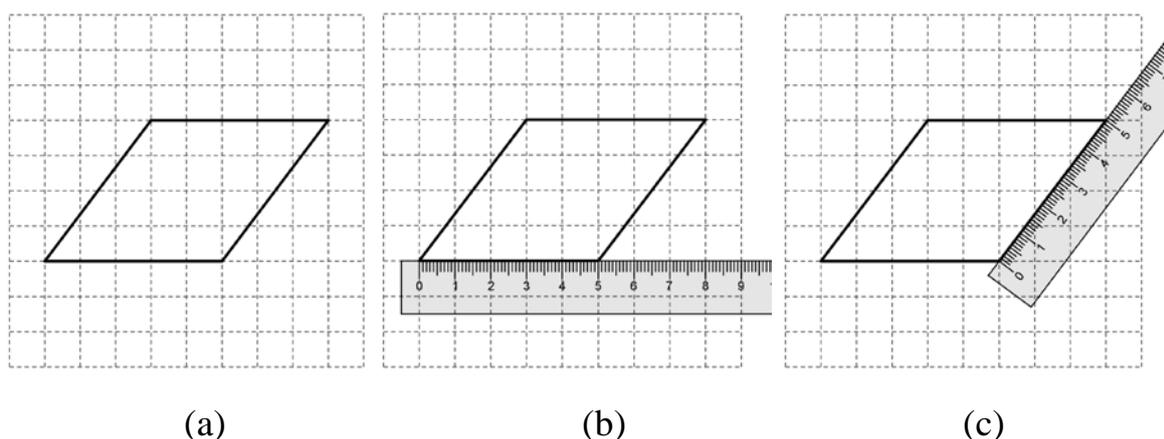


圖 二 十

結語

四邊形這個橫跨兩個學習階段的課題涉及很多的學習重點，也帶來很多的學習機會。我們希望這套課業能夠協助老師把握這些學習機會，幫助學生釐清迷思，建立正確觀念，並且學習如何以正確的數學詞彙描述幾何特性及關係，為他們將來學習幾何打好基礎。

鳴謝

謹此向歷年來協助我們在這個課題進行研究及試教的學校致謝：中華基督教會基全小學（2008 - 2009）、民生書院小學（2009 - 2010）、九龍灣聖若翰天主教小學（2010 - 2011）及基督教粉嶺神召會小學（2012 - 2013）。

參考文獻

- De Villiers, M.D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), p.11-18.
- Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In S.C. Chu, W.C. Yang and H.C. Lew (Eds.), *Proceedings of the Tenth Asian Technology Conference in Mathematics*. Cheong-Ju, South Korea: Asian Technology Conference in Mathematics.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

作者電郵：Cherie Ching cherieching@edb.gov.hk
 Anthony Or anthonyor@edb.gov.hk